**CB 17**

# EL LUGAR DEL CONTRAEJEMPLO EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA[1]

**Rosa MARTINEZ, Patricia DETZEL**

*Universidad Nacional del Comahue - Neuquén - Argentina*
*pdetzel@gmail.com rosifmartinez@gmail.com*

**Nivel Educativo:** Nivel Medio y Superior.

**Palabras Clave:** Actividad matemática, validación, contraejemplo, condicionamientos.

## RESUMEN

Nuestra intención es reflexionar acerca de los diferentes funcionamientos de la validación- que son legitimados en las clases y atravesados por diferentes condicionamientos- que desdibujarían una práctica adecuada de la validación. Más precisamente, tratamos el uso del contraejemplo como modo de justificar una proposición falsa. Vemos cómo la cultura escolar de la clase impone restricciones que condicionan el conocimiento que se elabora.

No se trata de decir que tal situación no funciona porque el docente no hace lo que tenía que hacer. Nos interesan las normas del quehacer matemático que elabora el alumno a través de las interacciones que se generan en la clase orientada y conducida por el docente, para el caso de justificar una falsedad matemática.

## ACERCA DE LA PROBLEMÁTICA DE LA VALIDACIÓN

Todos acordamos en pensar la enseñanza de la matemática como un proceso centrado en la producción de conocimientos matemáticos. Esto incluye explorar, conjeturar, reflexionar sobre el trabajo realizado y validar lo producido, según normas y procedimientos aceptados matemáticamente. El tratamiento de la verdad es una actividad del emprendimiento matemático. Tomando expresiones de Balacheff (2000): “las pruebas y refutaciones están necesariamente ligadas a las concepciones de los objetos matemáticos- las pruebas sirven a la construcción de objetos matemáticos y por lo tanto son irreducibles a la lógica formal”.

El trabajo en el aula en relación a la validación es complejo. Desde hace varios años, el lugar de la validación en la enseñanza, es objeto de estudio en numerosas investigaciones, dan cuenta de ello, los trabajos de Balacheff (1999a, 1999b, 2000), Duval (1992, 1993, 1999), Otte (1999), Hanna (1983, 2007) Shoenfeld (1992, 1999), Herbrt (2000), Panizza (2003, 2005), entre otros.

[1] Este trabajo se enmarca en el Proyecto de Investigación Diferentes tipos de Interacciones en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional del Comahue. Nuestro marco de referencia es principalmente la Teoría de Situaciones desarrollada por G Brousseau.

Balacheff (2000) señala en relación a los orígenes de la dificultad para enseñar y aprender la demostración en matemática.- en términos del contrato didáctico- que la misma emerge de las posiciones del alumno y del docente con respecto a los saberes en juego. El docente sería el garante de la legitimidad y de la validez epistemológica de lo que se construye en la clase; por lo tanto podría privar a los alumnos de un acceso auténtico a una problemática de la verdad y de la prueba. Además, establece una relación fundamental entre la prueba y las prácticas matemáticas de los alumnos- las pruebas se adaptan a las necesidades de gestión de los objetos matemáticos dentro de una cierta práctica de los conocimientos (o de una racionalidad).

El trabajo de Balacheff, ofrece medios teóricos para abordar la construcción de situaciones de enseñanza que implican conflicto socio-cognitivo (cuestión crucial, dado que es necesario un contexto social para construir el significado de la demostración como un medio de prueba). Sin embargo, advierte que los alumnos usan los medios de prueba como herramienta y no como objeto, en el sentido que los alumnos los ponen en práctica sin considerarlos explícitamente, ni cuestionan las reglas de validación movilizadas para fundamentar su posición. El autor se plantea la cuestión de construir situaciones que problematicen la prueba, que permitan debatir sobre la prueba, determinar características, restricciones.

En el mismo sentido Herbst (2000) explica que la investigación se dirige a comprender en qué condiciones puede el docente proponer, gestionar, mantener, e incorporar a la historia de la clase un proyecto teórico para la construcción de una teoría matemática que contenga a la demostración y a su significado.

> *En otro estudio (Martinez, 2005), acerca de los modos de validación de estudiantes del nivel superior, distingue aspectos vinculados a los procesos de validación. Los mismos son: determinar la verdad o falsedad de afirmaciones, en aritmética y geometría; construcción de una figura y validación del dibujo obtenido; validación de una propiedad, en geometría y aritmética; validación de un algoritmo de cálculo; validación de una propiedad a partir de un dibujo; validación en un conjunto finito y validación en un conjunto infinito. Para esta presentación tomamos el caso de la validación de proposiciones falsas que requieren el uso del contraejemplo.*

En Matemática, planteaba Gentile, "ante cualquier afirmación hecha caben dos cosas por hacer: *dar una demostración o dar un contraejemplo."* Así, para justificar la verdad de una proposición universal ó la falsedad de una proposición existencial se exige una *demostración* y para justificar la verdad de una proposición existencial ó la falsedad de una universal el único modo es a través de un ejemplo ó contrajemplo. Sin embargo, en la enseñanza este modo de validar, inmersos en la complejidad de clase, pareciera no ser tan así.[2]

Es común observar en las producciones de alumnos, de nivel medio y superior, en distintas instancias (en clase, orales y escritas), que ante proposiciones falsas, para justificar recurren a enunciar otra proposición verdadera que involucra parte de los contenidos enunciados. Por ejemplo, ante la tarea:

Determinar y justificar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

$(a+b)^2 = a^2 + b^2$ , con *a, b* reales. (1)

- Todo rombo es cuadrado.

[2] En este trabajo usaremos el término "*proposición*" refiriéndonos a las "*proposiciones universales*"

- Todo múltiplo de 3 es múltiplo de 9.

Es común encontrar respuestas por parte de los alumnos, como las siguientes:

[Alum 1] "*Falso porque lo que vales es:*

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\text{". (2)}$$

[Alum2] "*Falso, pues todo cuadrado es rombo*".

[Alum3] *"Falso. Para ser cuadrado tiene que tener los cuatro ángulos $\cong$ y sus diagonales también $\cong$.*"

[Alum4] "*Falso. Todo múltiplo de 9 es de 3*."

Ante este tipo de respuestas surge la inquietud, ¿qué lugar tiene el contraejemplo en la enseñanza?

## La validación en la enseñanza, el uso del contraejemplo

Es importante destacar que partimos de la base que para favorecer el acto de enseñanza-aprendizaje, es necesario que los alumnos asuman la responsabilidad matemática de resolver los problemas para lo cual deben aceptar también, las normas matemáticas de trabajo. Estas normas se aprenden a largo plazo, tiempo que generalmente no coincide con el tratamiento de un concepto especifico.

Uno de los aspectos de la complejidad de la adquisición del conocimiento matemático reside en gran medida en la diversidad de conocimientos que confluyen en la actividad matemática. Al respecto, el grupo de investigación CESAME[3] presenta un modelo, que permite analizar los conocimientos que se consideran objeto de enseñanza, de las formas de enseñanza que efectivamente se lleva a cabo, de los conocimientos que se evalúan, de los logros de los alumnos, de algunas fuentes de fracaso, etc. (Panizza y col, 2003). Dicho modelo organiza los conocimientos en distintos órdenes respondiendo a la pregunta ¿qué es lo que un estudiante debe aprender, más allá de los conceptos, definiciones, propiedades, para hacer matemática? Así los "contenidos", enunciados, definiciones son los que conforman los *conocimientos de orden I*; otros dominios necesarios para el quehacer matemático, tales como lenguaje matemático y el funcionamiento de la verdad y validez en matemática, constituyen los *conocimientos de orden II* y por último, aquellas concepciones acerca de qué es hacer matemática o qué es matemática constituyen los *conocimientos de orden III*.

Considerando las respuestas presentadas anteriormente para justificar afirmaciones falsas, por ejemplo la del ítem a), podríamos afirmar que los alumnos conocen que "el cuadrado de un binomio es un trinomio cuadrado perfecto" o conocen que "la potencia no es distributiva con respecto a la suma", conocimientos de orden I. Sin embargo no muestran con un ejemplo la falsedad de dicha afirmación, un conocimiento de orden II.

Ante esta situación, ¿qué interesa que el alumno domine? ¿el contenido que es correcto o el modo de validar? ¿qué priorizar? El docente, mayoritariamente, se encuentra ante una situación a resolver en la cual se plantea una disyuntiva, por un lado la situación podría centrarse en el modo de justificar (conocimiento de orden II) o, por el contrario, sustituir

[3] CESAME: equipo de investigación franco-argentino, con sede en Niza.

dicha situación por el establecimiento de un conocimiento correcto (se prioriza el conocimiento de orden I). En general, el docente tiende a suponer que controla las elaboraciones del alumno a través de lo que se va haciendo explícito en la clase. En el momento en que el estudiante pone en juego una conducta inesperada por el profesor toma conciencia de que muchas de las construcciones del alumno escapan a su control.
Generalmente los conocimientos de orden I, según Panizza (2003), son considerados más explícitamente como objeto de enseñanza que los conocimientos de orden II. Así, se considera explícitamente la enseñanza de contenidos en comparación con los otros conocimientos tales como las reglas de validación. En este sentido, cobraría más énfasis dar espacio al contenido que a las reglas del juego de la actividad matemática, más precisamente las vinculadas a la formalidad de la justificación matemática.

A continuación mostraremos cómo determinados condicionamientos del docente explicarían por qué el tratamiento de normas del quehacer matemático, como es el uso del contraejemplo para justificar afirmaciones falsas, no son objetos de enseñanza.

## EL LUGAR DEL CONTRAEJEMPLO EN LA CLASE

Para comprender el funcionamiento de determinados modos de validar, inmersos en la complejidad de la clase, nociones teóricas tales como: *condicionamiento docente* y *contrato didáctico* nos resultarán útiles.

Las interacciones entre docentes y alumnos están marcadas por lo que cada uno de los actores espera del otro a propósito de un cierto conocimiento. La noción de contrato didáctico (Brousseau, 2007) permite comprender el comportamiento de alumnos y profesores y explicar fracasos de los alumnos en matemática considerando la relación del alumno con el saber y con las situaciones didácticas y no a las que estarían ligadas a sus aptitudes u otras características.

Los profesores están condicionados por las reglas y leyes de una institución, y el problema es comprender esos condicionamientos para ver qué grado de libertad hay en la práctica de enseñanza y qué decisiones se pueden tomar. En su relación con la institución, hay condiciones que comandan sus reacciones, es decir cualquier sujeto en la institución haría lo mismo en esa situación (Fregona, 1998).

¿Cómo se ven esas presiones, esos condicionamientos, en relación al uso del contraejemplo?
¿Cómo se reflejan esos condicionamientos en el saber que efectivamente aparece en la clase?

El modo de concebir la clase de matemática y la cultura escolar imponen restricciones que condicionan los conocimientos que viven en la misma. En muchas ocasiones, situados en la clase, ante una afirmación falsa suele ocurrir, como ya dijimos, que un alumno la corrija. En ese escenario, un profesor atendiendo al desarrollo de la clase, acepta considerar la afirmación corregida y continuar con su proyecto de enseñanza, en esta escena no aparece el análisis de la falsedad de la afirmación original. Esto es muy común y comprensible, pues si se piensa que "la clase de matemática trata de conocimientos, de verdades, etc. cómo dar lugar a que en la clase circulen "conocimientos falsos", aunque más no se sea para tratar la justificación de la misma.

La enseñanza está regulada y organizada en contenidos curriculares. El desarrollo del programa se hace en un tiempo estipulado y esto condiciona los conocimientos que pueden vivir en las clases. Así, el docente trata en sus clases de instalar un conocimiento, un procedimiento válido, definiciones, propiedades... que responden a contenidos curriculares.

Prioriza tratar nociones matemáticas que son soluciones para determinados problemas, pero rara vez destina tiempo para desterrar un procedimiento o justificar la razón de su falsedad. Pues si lo hiciera, podría ocurrir que el docente tenga la sensación que no enseñó nada. Al respecto, Brousseau (2007), plantea la necesidad del profesor acerca de saber, por ejemplo, cómo hacer posible una verdadera actividad científica en su clase sin sacrificar el tiempo de los alumnos en tareas que no tengan virtudes formadoras. Hay situaciones[4] que favorecen aprendizajes por parte de los alumnos, pero que no se corresponden a ninguna noción matemática.

En los términos de contrato didáctico, Brousseau (2007) postula: "si se admite que los conocimientos del alumno se manifiestan de manera efectiva sólo a través de las decisiones que toma personalmente en situaciones apropiadas, entonces el profesor no puede decirle lo que quiere que haga, ni dictarle sus decisiones, porque en ese caso renunciarían a que el alumno las produjera y también a "enseñárselas". Aprender no consiste en ejecutar órdenes ni en copiar soluciones a problemas. Si lo que el alumno espera del profesor es que le enseñe conocimientos matemáticos, propiedades, definiciones, … y el profesor espera que el alumno sea capaz de usar conocimientos matemáticos, propiedades, definiciones, … entonces cómo gestionar la búsqueda de un ejemplo el cual haga falsa! la afirmación".

Aunque esas normas no sean objetos de enseñanza, de algún modo circulan en la clase. La elaboración de las normas está atravesada por las interacciones que se generan en la clase orientada y conducida por el docente. En este sentido, Sadovsky (2007) dice que "el docente va comunicando, a veces explícitamente, y muchas otras de manera implícita, a través de palabras y también de gestos, actitudes y silencios, aspectos vinculados al funcionamiento del asunto matemático que se está tratando en la clase".

Por ejemplo cuando en una clase, hay puntos de vista contradictorios, y el docente señala que deben ponerse de acuerdo, se está comunicando implícitamente "*no se pueden plantear afirmaciones contradictorias*". En el mismo sentido cuando en una clase aparecen afirmaciones falsas como las de nuestro ejemplo y aceptamos que sean corregidas, sin invertir un tiempo a justificar por qué son falsas, implícitamente ¿Qué se está comunicando? ¿Cuándo y por qué en determinados momentos de la clase una afirmación es falsa? ¿porque es incorrecta o porque se puede mostrar el contraejemplo?

La construcción de reglas del quehacer matemático resultan de las interacciones en la clase entre el docente y los alumnos, en un trabajo en el que muchas veces los estudiantes reelaboran las normas a partir de la interpretación de los gestos sutiles del docente que legitiman o no ciertos procedimientos. A partir del "gesto de aceptación", por parte del profesor, de corregir una proposición en lugar de dar un contraejemplo, ¿qué interpreta el alumno? ¿qué normas reelabora?

## A MODO DE CIERRE

Nuestro análisis apunta a la toma de conciencia de la complejidad del funcionamiento de una situación dada, particularmente a la naturaleza de las interacciones entre los alumnos y sus procedimientos de validación en sus relaciones hacia la matemática.

[4] Cf Detzel – Ruiz. 2000. "*El éxito del fracaso o fracaso del éxito: análisis de una actividad de enseñanza de la matemática"* Boletín de la Sociedad Argentina de Educación Matemática. Año 2 Nº7. Noviembre.

Vemos que muchas de las elecciones didácticas, del docente están atravesadas por la manera de organizar la enseñanza, en contenidos curriculares, y por el modo de concebir las clases de matemática en las que solo circulan conocimientos verdaderos, etc. Esto conlleva a los profesores tanto a no considerar, generalmente, las normas del funcionamiento de la validación de afirmaciones falsas como objeto de enseñanza; como también, en legitimar en las clases modos de validación- no aceptables desde la matemática- que debilitarían prácticas de búsqueda del contraejemplo.

En este sentido, los estudiantes elaboran sus propias normas interpretando los gestos de los docentes que legitiman, o no, ciertos procedimientos y por ende queda a cargo del alumno la elaboración de la norma para validar una proporción falsa.

## BIBLIOGRAFÍA

**ALAGIA, H. y col.** 2005. Reflexiones teóricas para la Educación Matemática. Libros del Zorzal. Bs. As.

**BALACHEFF, N.** 1999a. "Es la argumentación un obstáculo? Invitación a un debate." En http:// www-cabri.imag.fr/Preuve, mayo/junio.

**BALACHEFF, N.** 1999b. "Hacia un cuestionamiento etnomatemático de la enseñanza de la prueba." En http:// www-cabri.imag.fr/Preuve, setiembre/octubre.

**BALACHEFF, N.** 2000. Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Ed Una Empresa Docente, Bogotá.

**BROUSSEAU, G.** 2007. Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Libros del Zorzal. Bs. As.

**DETZEL – RUIZ.** 2000. “*El éxito del fracaso o fracaso del éxito: análisis de una actividad de enseñanza de la matemática”* Boletín de la Sociedad Argentina de Educación Matemática. Año 2 Nº7. Noviembre.

**DUVAL, R.** 1992-1993. “Argumenter, demontrer, expliquer: continuite ou rupture cognitive?”, en *Petit X* Nº 31, Francia.

**DUVAL, R.** 1999. "Algunas cuestiones relativas a la argumentación.", en http:// wwwcabri. imag.fr/Preuve, noviembre/diciembre.

**FREGONA, D.** 1998. “¿Cuál es el lugar de la didáctica de la matemática en la formación de profesores de matemática?”, FAMAF, U.N.Córdoba.

**GENTILE E.** 1988. *Notas de álgebra,* Edición Colihue, Eudeba, Argentina.

**HANNA, G.** 1983. Rigous proofs in mathematics educations, C. Serie 48, Ontario.

**HANNA, G.** 2007. Visualización y la prueba: un breve estudio de perspectivas filosóficas, Berlin edic; ZDM, Vol 39/ Nº 1-2.

**HERBST, P.** 2000. “¿A dónde va la investigación sobre la prueba?”, en Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Ed Una Empresa Docente, Bogotá.

**LAKATOS, I.** 1976. *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*, Alianza Editorial, España.

**MARTINEZ, R.** 2005. *Distintos modos de argumentar en enseñanza de la matemática*, Tesis de maestría, F. de Ingeniería, UNCo.

**OTTE, M.** 2000. "La prueba matemática y la percepción IV.", en http:// www-cabri.imag.fr/Preuve,julio/agosto.

**PANIZZA M. Y DROUHARD J. P.** 2003. Cap. II: "los órdenes de conocimiento como marco para significar las prácticas evaluativos" pp. 51-73 en Palou de Maté C. (coord.) (2003), *La enseñanza y la evaluación. Una propuesta para matemática y lengua*, Colección: Estudios Universitarios, Ed. Edigraf. S.A. Bs. As., Argentina

**PANIZZA, M.** 2005. Razonar y Conocer. Aportes a la comprensión de la racionalidad matemática de los alumnos. Libros del Zorzal. Bs. As.

**SADOVSKY, P.** 2007. "La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática" en *Reflexiones Teóricas para la Educación Matemática*. Libros el Zorzal. Bs. As.